АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА ДЕНТОНА

В.И. Моторин, *канд. экон. наук,*
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Семейство методов Дентона широко используется в международной статистической практике для увязки краткосрочных (квартальных, месячных) оценок с годовыми опорными оценками макроэкономических показателей. Процесс согласования данных с высокой периодичностью и более достоверных и надежных годовых оценок в специальной литературе принято называть *бенчмаркингом*. Методы бенчмаркинга, в частности, служат полезным инструментом корректировки квартальных национальных счетов. Пропорциональный метод Дентона и его модификации, основанные на так называемом принципе сохранения движения (movement preservation principle) с использованием метода наименьших квадратов, обладают рядом существенных преимуществ (как содержательных, так и технических) по сравнению с альтернативными подходами к выполнению процедур бенчмаркинга макроэкономических данных потокового типа [1, par. 6.A1.3, 6.A1.7]. Настоящая статья посвящена изучению аналитических свойств пропорционального метода Дентона на фоне вычислительных аспектов его практической реализации.

Пусть имеются два интервальных динамических ряда различной длины, записанные в векторной форме: вектор-столбец I размерности $T\times1$ предварительных внутригодовых оценок макроэкономического показателя I_t (ряд значений показателя-индикатора в терминологии руководства [1]) и вектор-столбец A размерности $K\times1$ опорных (более достоверных и надежных) годовых оценок того же показателя A_k, $t = 1\div T$, $k = 1\div K$, где символ «$\div$» между нижней и верхней границами диапазона изменения индекса означает, что индекс последовательно пробегает все целочисленные значения в указанном диапазоне. Предполагается, что годовые суммы оценок I_t для всех или нескольких лет из периода наблюдений не совпадают с соответствующими годовыми оценками.

В рамках данной статьи ограничимся «классическим» случаем бенчмаркинга ретроспективного ряда I, то есть примем $T = nK$, где n - число шаговых периодов ряда в году (четыре для квартальных рядов, 12 - для месячных и т. п.). Обозначим через X вектор-столбец размерности $T\times1$ искомых значений внутригодовых оценок показателя X_t, аддитивно увязанных с опорными годовыми оценками A. Следуя [1, par. 6.A1.14], рассмотрим модифицированную взвешенную версию пропорционального метода Дентона, в соответствии с которой требуется минимизировать квадратичную целевую функцию

$$D_W(X;X_0/I_0)=\sum_{t=1}^{T}w_t\left(\frac{X_t}{I_t}-\frac{X_{t-1}}{I_{t-1}}\right)^2= \tag{1}$$
$$=w_1\left(\frac{X_1}{I_1}-\frac{X_0}{I_0}\right)^2+\sum_{t=2}^{T}w_t\left(\frac{X_t}{I_t}-\frac{X_{t-1}}{I_{t-1}}\right)^2$$

при линейных ограничениях в виде равенств

$$\sum_{t=nk-n+1}^{nk}X_t=A_k,\qquad k=1\div K, \tag{2}$$

где $w_t \geq 0$, $t = 1\div T$ - экзогенно задаваемые весовые коэффициенты, характеризующие динамику информационной «ценности» слагаемых целевой функции (1).

Взвешенный пропорциональный метод Дентона с целевой функцией (1) ориентирован на построение временного ряда X, который как можно более точно - насколько это позволяют опорные ограничения (2) - воспроизводит особенности динамики индикатора I, включая тренд-циклические, сезонные и календарные эффекты, при $t = 1\div T$ на квазипропорциональной основе. Следует подчеркнуть, что в процессе бенчмаркинга с использованием подобных разностных методов обработка вновь поступивших данных за год $K+1$ (или пересмотренных данных за год K) приводит к изменениям в расчетной динамике ряда X за все предыдущие годы. Более того, как нетрудно видеть, расчетная динамика ряда X в существенной степени зависит также от выбора начального условия бенчмаркинга, выражаемого отношением X_0 / I_0 в ситуации, когда значение показателя-индикатора при $t = 0$, вообще говоря, неизвестно.

Для того чтобы изучить особенности формирования рекурсивной базы пропорционального метода Дентона, преобразуем оптимизационную задачу бенчмаркинга (1) и (2) к более удобному аналитическому виду. Положим

$$X_t = I_t(1 + x_t),\quad t = 1\div T, \tag{3}$$

где x_t, $t = 1\div T$ - неизвестные безразмерные множители, и представим эту формулу в матричной записи

$X = I + \tilde{I}x$, где надстрочным символом «~» обозначена математическая операция преобразования вектора в диагональную матрицу. Кроме того, расширим действие формулы (3) на базовый период $t = 0$, то есть будем считать, что $X_0/I_0 = 1 + x_0$. Введенное матричное уравнение замены неизвестных переменных задачи бенчмаркинга (1) и (2), с одной стороны, обеспечивает их масштабирование, а с другой - упрощает дальнейший анализ критериальных основ бенчмаркинга исходного ряда в соответствии с опорными годовыми оценками.

Используя введенный вектор переменных x и символ «штрих» для операции транспонирования матриц, преобразуем квадратичную целевую функцию (1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} d_W(x; x_0) &= \sum_{t=1}^{T} w_t (x_t - x_{t-1})^2 = \\ &= x'\Delta_1' W \Delta_1 x - 2w_1 x_1 x_0 + w_1 x_0^2, \end{aligned} \qquad (4)$$

где W - диагональная матрица экзогенных весовых коэффициентов порядка T; Δ_1 - невырожденная (унимодулярная) левая двухдиагональная матрица оператора первых конечных разностей ряда порядка T с единичной главной диагональю, элементы которой определяются по формуле

$$(\Delta)_{ij} = \begin{cases} 1 \quad \text{при } i = j, \qquad j = 1 \div T; \\ -1 \quad \text{при } i = j + 1, \quad j = 1 \div (T-1); \\ 0 \text{ - в остальных случаях.} \end{cases}$$

Левая часть формулы (4) позволяет дать простую геометрическую интерпретацию принципа сохранения движения, составляющего логическую основу пропорционального метода Дентона. Идеальным воплощением принципа сохранения движения, очевидно, является умножение всех значений ряда показателя-индикатора I на общую скалярную константу $(1 + x)I = X$, которое, к сожалению, не обеспечивает полную увязку внутригодовых и годовых опорных оценок. Дифференциация константы $1 + x$ по годам рассматриваемого периода $k = 1 \div K$, то есть применение метода пропорционального распределения (pro rata distribution), помогает устранить этот недостаток, однако в ряде случаев порождает так называемую проблему скачка (step problem) при переходе от года k к году $k + 1$ [1, example 6.1].

В сложившейся ситуации вполне естественной альтернативой постоянной и ступенчатой функциям может служить функция с ограниченной вариацией типа (4), которая является достаточно гибкой, чтобы увязать внутригодовые оценки макроэкономического показателя с годовыми, и в то же время ввиду своей «гладкости» не порождает неоправданных скачков. Нетрудно видеть, что минимизируемая квадратичная вариация (4) с точностью до постоянного слагаемого, зависящего от величины шагового интервала $[t, t+1]$, совпадает с взвешенной суммой квадратов длин всех звеньев ломаной линии, последовательно соединяющей уровни расчетного динамического ряда $x = \{x_t, t = 1 \div T\}$.

Далее, целевую функцию (1) можно также представить в альтернативной эквивалентной форме

$$d_W(x; x_0) = x'\Delta' W_1 \Delta x + w_1 x_1^2 - 2w_1 x_1 x_0 + w_1 x_0^2, \qquad (5)$$

где W_1 - диагональная матрица порядка T-1 экзогенных весовых коэффициентов w_t, $t = 2 \div T$; Δ - прямоугольная двухдиагональная матрица оператора первых конечных разностей ряда размерности $(T-1) \times T$ с элементами

$$(\Delta_1)_{ij} = \begin{cases} -1 \quad \text{при } i = j, \qquad j = 1 \div (T\text{-}1); \\ 1 \quad \text{при } i = j - 1, \quad j = 2 \div T; \\ 0 \text{ - в остальных случаях.} \end{cases}$$

Чтобы записать в новых переменных условие увязки внутригодовых и опорных годовых оценок (2), введем в рассмотрение прямоугольную матрицу S размерности $K \times T$ линейного оператора годового пошагового суммирования с элементами

$$(S)_{kt} = \begin{cases} 1 \quad \text{при } t = (nk - n + 1) \div nk, \quad k = 1 \div K; \\ 0 \text{ - в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда (2) принимает вид $SX = A$ или с учетом матричной записи (3)

$$S\tilde{I}x = A - SI. \qquad (6)$$

Таким образом, в результате замены переменных в задаче (1), (2) и выполненных преобразований возникает следующая оптимизационная задача бенчмаркинга динамического ряда I: минимизировать целевую функцию (4) или (5) при векторном линейном ограничении (6).

В специальной литературе рассматриваются два способа выбора начального условия бенчмаркинга - отношения $X_0/I_0 = 1 + x_0$. В оригинальном варианте своего метода Ф. Дентон постулировал, что точка $t = 0$ располагается вне периода бенчмаркинговой корректировки исходного динамического ряда I и поэтому можно положить $X_0 = I_0$, откуда $x_0 = 0$ [2]. Несколько позже П. Шолет, один из авторов монографии [3], на полуэмпирической основе показал, что использование условия Дентона, вообще говоря, влечет за собой нарушение принципа сохранения движения в начале периода корректировки ряда и предложил заменить его на $X_0/I_0 = X_1/I_1$, то есть $x_0 = x_1$. Впоследствии эта точка зрения получила широкое признание и нашла отражение в авторитетном международном руководстве [1].

Вместе с тем формальное обоснование оптимальности начального условия бенчмаркинга в форме $x_0 = x_1$ можно получить непосредственно путем решения задачи условной минимизации целевой функции $d_W(x; x_0)$, в которой начальный параметр x_0 рассматривается как независимая переменная, с учетом ограничения (6). При использовании представления целевой функции в форме (4) функция Лагранжа для этой задачи приобретает следующий вид:

$$L_d(x; \mu, x_0) = x'\Delta_1'W\Delta_1 x - \mu'\left(S\widetilde{I}x + SI - A\right) - 2w_1x_1x_0 + w_1x_0^2,$$

где μ - векторный множитель Лагранжа, ассоциированный с ограничением (6).

Вычислив частные производные $L_d\,(x; \mu, x_0)$ по векторам x, μ и скаляру x_0 и приравняв их нулю, получим следующую систему T+K+1 линейных (нормальных) уравнений:

$$2\Delta_1'W\Delta_1 x - \widetilde{I}S'\mu = 2w_1x_0u, \quad S\widetilde{I}x + SI - A = 0,$$
$$-2w_1x_1 + 2w_1x_0 = 0, \tag{7}$$

где u - вектор-столбец размерности T×1 с первой компонентой, равной 1, и остальными компонентами, равными нулю.

Нетрудно видеть, что рассматриваемое начальное условие бенчмаркинга $x_0 = x_1$ немедленно следует из третьего уравнения системы (7).

Варианты записи целевой функции задачи бенчмаркинга (4) и (5) приобретают следующий вид:

при начальном условии $x_0 = 0$:

$$d_W(x|\, x_0 = 0) = x'\Delta_1'W\Delta_1 x =$$
$$= x'\Delta'W_1\Delta x + w_1x_1^2 = w_1x_1^2 + \sum_{t=2}^{T} w_t\left(x_t - x_{t-1}\right)^2, \tag{8}$$

а при условии $x_0 = x_1$:

$$d_W(x|\, x_0 = x_1) = x'\Delta_1'W\Delta_1 x - w_1x_1^2 =$$
$$= x'\Delta'W_1\Delta x = \sum_{t=2}^{T} w_t\left(x_t - x_{t-1}\right)^2 \tag{9}$$

соответственно.

Полученные формулы наглядно демонстрируют различие между двумя рассмотренными способами выбора начального условия бенчмаркинга. Если целевая функция (9) выражает (с точностью до аддитивной константы) взвешенную сумму квадратов длин всех звеньев ломаной линии, соединяющей последовательные уровни расчетного динамического ряда от x_1 до x_T, то (8) содержит дополнительное квадратичное по x_1 слагаемое, которое также подлежит минимизации в процессе решения задачи бенчмаркинга динамического ряда I. Это означает, что в случае, когда при $t = 1$ наблюдаемая невязка годовой суммы и суммы внутригодовых оценок

$$\delta_1 = A_1 - \sum_{t=1}^{n} I_t$$

относительно велика, имеет место ложное смещение оценки x_1 в сторону нуля (spurious movement [3]) с затухающим рекуррентным нарушением принципа сохранения движения при $t = 2, 3, \dots, T$.

Выполненный выше раздельный анализ двух начальных условий бенчмаркинга приводит к идее поиска общего аналитического решения, объединяющего различные варианты построения рекурсивной базы пропорционального метода Дентона. Для этого требуется найти однопараметрическое семейство векторов $x^*(x_0)$, доставляющее минимум целевой функции (4) или (5) с учетом векторного линейного ограничения (6) при любых значениях скалярного параметра x_0.

Здесь следует заметить, что квадратичная форма в правой части (4) не вырождена, так как ее симметричная трехдиагональная матрица $\Delta'_1W\Delta_1$ представляет собой произведение трех невырожденных квадратных матриц порядка T, и, следовательно, формулировка (4), (6) может служить исходной базой для поиска общего аналитического решения оптимизационной задачи бенчмаркинга. Напротив, симметричная матрица $\Delta'W_1\Delta$ порядка T в правой части выражения (5) в соответствии с известным неравенством Сильвестра имеет неполный ранг, поскольку является произведением прямоугольной ранга T–1, квадратной невырожденной и другой прямоугольной матриц ранга T–1. Это означает, что точная идентифицируемость неизвестной векторной переменной x в задаче условной минимизации функции (5) достигается только за счет наличия опорных ограничений (6), а процесс решения этой задачи сводится к обращению полноразмерной матрицы системы соответствующих нормальных уравнений порядка $T+K = (1 + n)\,K$.

Итак, задача минимизации целевой функции (4) при ограничении (6) представляет не только теоретический интерес, но и оказывается полезной в вычислительном отношении, поскольку, как показано ниже, система первых двух линейных уравнений (7) допускает решение в аналитическом виде. Первое уравнение системы (7) в силу невырожденности матрицы $\Delta'_1W\Delta_1$ позволяет выразить искомый вектор x через векторный множитель Лагранжа μ и скалярный параметр x_0 в виде:

$$x = \frac{1}{2}\left(\Delta_1'W\Delta_1\right)^{-1}\widetilde{I}S'\mu + w_1x_0\left(\Delta_1'W\Delta_1\right)^{-1}u.$$

Подставив это выражение во второе уравнение системы (7) и проведя несложные преобразования, вычислим линейную оценку вектора μ:

$$\mu = 2\left[S\widetilde{I}\left(\Delta_1' W \Delta_1\right)^{-1}\widetilde{I}S'\right]^{-1} \cdot \left[A - SI - w_1 x_0 S\widetilde{I}\left(\Delta_1' W \Delta_1\right)^{-1} u\right].$$

Обратной подстановкой получаем однопараметрическое аналитическое решение задачи минимизации целевой функции (4) при опорном ограничении (6), зависящее от скалярного параметра x_0:

$$x^*(x_0) = D^{-1}F'M^{-1}(A - SI) + w_1 x_0\left(E - D^{-1}F'M^{-1}F\right)D^{-1}u, \quad (10)$$

где $D = \Delta_1' W \Delta_1$, $F = S\widetilde{I}$ - прямоугольная матрица размерности $K \times T$; $M = FD^{-1}F'$ - квадратная матрица порядка K и, наконец, E - единичная матрица.

В полученном решении фигурируют две обратные симметричные матрицы - D^{-1} порядка T и M^{-1} порядка K. Выше отмечалось, что матрица D равна произведению трех невырожденных квадратных матриц порядка T, откуда

$$D^{-1} = \Delta_1^{-1}{}' W^{-1} (\Delta_1')^{-1}. \quad (11)$$

Докажем по индукции, что результатом обращения левой двухдиагональной матрицы Δ_1 является нижняя треугольная матрица с единичными ненулевыми элементами. В качестве базы индукции рассмотрим случаи $T = 2$ и $T = 3$:

$$\Delta_1(2) \cdot \Delta_1^{-1}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E;$$

$$\Delta_1(3) \cdot \Delta_1^{-1}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E,$$

которые легко проверяются непосредственно. Далее, пусть $\Delta_1'(T)$ - нижняя треугольная матрица порядка T с единичными ненулевыми элементами. Для доказательства шага индукции воспользуемся методом окаймления, который особенно эффективен при обращении треугольных матриц. Запишем окаймленную матрицу Δ_1 в виде рекуррентного (по порядку T) соотношения

$$\Delta_1(T+1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta_1(T) & (0, 0, \dots, 0, 0)' \\ \hline (0, 0, \dots, 0, -1) & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Поскольку $\Delta_1(T)$, по предположению, не вырождена, с помощью известной формулы метода окаймления получаем нижнюю треугольную матрицу:

$$\Delta_1^{-1}(T+1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta_1^{-1}(T) & (0, 0, \dots, 0, 0)' \\ \hline (1, 1, \dots, 1, 1) & 1 \\ \hline \end{array}$$

с единичными ненулевыми элементами, что и требовалось доказать.

Результатом обращения правой двухдиагональной матрицы Δ_1', очевидно, является верхняя треугольная матрица с единичными ненулевыми элементами. Легко убедиться, что элементы произведения полученных обратных матриц определяются по формуле

$$[\,\Delta_1^{-1}(\Delta_1')^{-1}]_{ij} = \min\{i, j\}. \quad i = 1 \div T,\ j = 1 \div T. \quad (12)$$

Наконец, обратной к диагональной матрице весовых коэффициентов W порядка T служит диагональная матрица с элементами $1/w_t$, $t = 1 \div T$. На основе установленных свойств матричных сомножителей в правой части (11) можно показать, что симметричная обратная матрица D^{-1} имеет нисходящую по главной диагонали характерную «уголковую» структуру с элементами

$$\left(D^{-1}\right)_{ij} = \sum_{t=1}^{\min\{i,j\}} \frac{1}{w_t}, \quad i = 1 \div T,\ j = 1 \div T. \quad (13)$$

Она полностью определяется набором T кумулятивных сумм обратных величин весовых коэффициентов $1/w_t$, $t = 1 \div T$. Заметим, что матрица (12) получается из D^{-1} предельным переходом при одновременном устремлении всех весовых коэффициентов w_t к единице, то есть при $W \to E$.

Таким образом, нахождение общего аналитического решения задачи бенчмаркинга (4), (6) по однопараметрической формуле (10) не требует трудоемких расчетов обратной матрицы D^{-1} порядка $T = nK$ и сводится лишь к обращению симметричной матрицы M порядка K в отличие от задачи (5), (6), решение которой, как отмечалось выше, сопряжено с обращением матрицы системы нормальных уравнений порядка $T+K = (1 + n)K$. Кроме того, формула (13) позволяет упростить правую часть выражения (10), поскольку

$$D^{-1}u = \frac{1}{w_1}e, \quad FD^{-1}u = \frac{1}{w_1}Fe = \frac{1}{w_1}S\widetilde{I}e = \frac{1}{w_1}SI,$$

где e - вектор-столбец размерности $T \times 1$, все компоненты которого равны 1.

В результате аналитическое решение (10) принимает следующий вид:

$$x^*(x_0) = D^{-1}F'M^{-1}(A - SI) + x_0\left(e - D^{-1}F'M^{-1}SI\right). \quad (14)$$

Рассмотрим возможности и особенности использования общего аналитического решения (14) при различных вариантах выбора рекурсивной базы пропорционального метода Дентона. Наиболее простое выражение оно приобретает в условиях оригинального постулата Дентона:

$$x^*|_{x_0=0} = D^{-1}F'M^{-1}(A-SI) = \\ = (\Delta_1'W\Delta_1)^{-1}\tilde{I}S'\left[S\tilde{I}(\Delta_1'W\Delta_1)^{-1}\tilde{I}S'\right]^{-1}(A-SI), \quad (15)$$

откуда следует, что в этом случае расчетный динамический ряд x^* является линейной формой вектора исходных невязок внутригодовых и опорных годовых оценок $A - SI$, а при $A = SI$ оптимизационная задача бенчмаркинга (4), (6) имеет нулевое решение. Таким образом, выбор начального условия бенчмаркинга в виде $x_0 = 0$ обеспечивает идемпотентность пропорционального метода Дентона, которая служит важным косвенным признаком корректности подобных алгоритмов математической обработки статистических данных.

С инкорпорированием в общее аналитическое решение (14) оптимального начального условия $x_0 = x_1$ дело обстоит несколько сложнее, поскольку его непосредственный учет невозможен. Умножив обе части (14) на вектор-строку u', получим

$$u'x^*(x_0) = x_1 = u'p + x_0u'q,$$

где векторы p и q легко определяются из правой части (14). Так как первая компонента динамического ряда x^* должна совпадать с x_0 по условию, возникает уравнение относительно скалярной неизвестной x_0, решение которого при $u'q \neq 1$ записывается в форме

$$x_0 = \frac{u'p}{1-u'q},$$

после чего выражение (14) принимает следующий вид:

$$x^*|_{x_0=x_1} = p + x_0q = p + \frac{u'p}{1-u'q}q. \quad (16)$$

Выполнив (с учетом того, что матрица D^{-1} - симметричная) несложные преобразования

$$u'p = u'D^{-1}F'M^{-1}(A-SI) = \\ = (FD^{-1}u)'M^{-1}(A-SI) = \frac{1}{w_1}I'S'M^{-1}(A-SI);$$

$$u'q = u'(e - D^{-1}F'M^{-1}SI) = \\ = 1 - (FD^{-1}u)'M^{-1}SI = 1 - \frac{1}{w_1}I'S'M^{-1}SI,$$

окончательно имеем

$$x_0 = \frac{I'S'M^{-1}(A-SI)}{I'S'M^{-1}SI} = \frac{I'S'M^{-1}A}{I'S'M^{-1}SI} - 1.$$

Следует подчеркнуть, что предположение $u'q \neq 1$ в ходе выполненных преобразований трансформировалось в неравенство $I'S'M^{-1}SI \neq 0$, не являющееся ограничительным с практической точки зрения.

Итак, аналитическое решение (14) при выборе начального условия $x_0 = x_1$ приобретает следующий вид:

$$x^*|_{x_0=x_1} = D^{-1}F'M^{-1}(A-SI) + \\ + \frac{I'S'M^{-1}(A-SI)}{I'S'M^{-1}SI} \cdot (e - D^{-1}F'M^{-1}SI). \quad (17)$$

Полученное выражение представляет расчетный динамический ряд x^* как сумму линейной формы вектора $A - SI$ и второго векторного слагаемого, числовой коэффициент при котором линейно зависит от вектора исходных невязок внутригодовых и опорных годовых оценок, то есть в данном случае задача бенчмаркинга (4), (6) аналогично варианту (15) имеет нулевое решение при $A = SI$. Следовательно, оптимальное начальное условие бенчмаркинга также обеспечивает идемпотентность пропорционального метода Дентона.

Здесь интересно отметить, что формулу (14) при условии $x_0 = x_1$ можно интерпретировать еще и как рекуррентное соотношение, связывающее последовательные приближения искомого вектора x^* и его первой компоненты:

$$x^{*(m+1)} = p + x_0^{*(m)}q = p + qu'x^{*(m)}, \ m = 0,1,2,..., \quad (18)$$

где m - номер итерации.

Приняв в качестве начального приближения оригинальное предположение Дентона, то есть положив $x_0^{*(0)} = 0$, последовательно получаем

$$x^{*(1)} = p, \quad x^{*(2)} = p + p_1q, \quad x^{*(3)} = p + p_1(1 + q_1)q,$$

$$x^{*(4)} = p + p_1(1 + q_1 + q_1^2)q, \ ... \ .$$

Если первая компонента $u'q$ вектора q по абсолютной величине не превосходит единицы, то геометрическая прогрессия в круглых скобках сходится, и в пределе при $m \to \infty$ имеем

$$x^*|_{x_0=x_1} = \lim_{m\to\infty} x^{*(m)} = p + \frac{p_1}{1-q_1}q = p + \frac{u'p}{1-u'q}q,$$

что в точности соответствует формуле (16). Следовательно, условия сходимости итерационного процесса (18) и существования частного аналитического решения (17) эквивалентны.

Естественным логическим развитием идеи аналитического объединения различных вариантов выбора начального условия бенчмаркинга в рамках пропорционального метода Дентона является совместное использование однопараметрического решения (14) и обобщенного «технического» требования $x_0 = a$, где a - некоторая произвольная константа. На первый взгляд кажется, что это не составляет проблемы - достаточно лишь подставить формулу $x_0 = a$ в аналитическое решение (14). Однако легко видеть, что в случае $a \neq 0$ оптимизационная задача бенчмаркинга (4), (6) при $A = SI$ имеет ненулевое решение, поскольку второе слагаемое в (14) в отличие от первого не обращается в нуль. Таким образом, выбор начального условия бенчмаркинга в обобщенной форме $x_0 = a$ влечет за собой утрату свойства идемпотентности пропорционального метода Дентона (хотя, как показано ниже, этот вывод справедлив только для одноэтапных версий его автономной реализации).

Тем не менее на основе сопоставления общего (14) и частных аналитических решений (15) и (17) нетрудно заключить, что в качестве универсального начального условия, обеспечивающего идемпотентность алгоритма бенчмаркинга по методу Дентона, можно использовать любую функцию векторного аргумента A - SI, принимающую нулевое значение при $A = SI$. Многообразие подобных функций, разумеется, весьма обширно, но в рамках настоящей работы целесообразно ограничиться лишь простейшим случаем $x_0 = \alpha'(A - SI)$, где α - некоторый заранее специфицированный вектор-столбец размерности $K\times 1$. Тогда аналитическое решение (14) принимает следующий вид:

$$x^*(\alpha) = D^{-1}F'M^{-1}(A - SI) + \\ + \alpha'(A - SI)\cdot\left(e - D^{-1}F'M^{-1}SI\right). \qquad (19)$$

Формула (19) очерчивает широкий класс способов формирования рекурсивной базы пропорционального метода Дентона. Так, если вектор α лежит в гиперплоскости K-мерного пространства, ортогональной вектору $A - SI$, то $x_0 = 0$, и (19) превращается в частное решение (15), соответствующее оригинальному постулату Дентона. Далее, положив в (19) $\alpha=(I'S'M^{-1}SI)^{-1}M^{-1}SI$, получим частное решение (17), ассоциированное с оптимальным начальным условием бенчмаркинга. Другие варианты спецификации вектора α порождают множество различных начальных условий гибкой реализации пропорционального метода Дентона при соблюдении требования его идемпотентности, которые, по-видимому, вполне заслуживают дополнительного изучения.

Задача бенчмаркинга макроэкономического ряда I на темпоральном интервале $t = 1\div T$ в соответствии с опорными годовыми оценками A рассматривалась выше в автономной постановке, без учета внешних пространственно-временных аспектов. Между тем значительный практический интерес представляет проблема согласования внутригодовых оценок макроэкономического показателя с опорными оценками в условиях их регулярных пересмотров при $t = T, T-1, T-2,...$, осуществляемых уполномоченными статистическими институтами, а также по мере поступления новых данных для периодов $t = T+1, T+2, T+3, ...$. Основной вопрос, который возникает в связи с изменениями в динамических рядах I и A, заключается в выборе горизонта расчетов актуализированной динамики ряда X.

Если бенчмаркинг обновленных макроэкономических данных проводить для всего периода имеющихся наблюдений $t = 1\div\theta$, $\theta \geq T$, то следует воспользоваться частным аналитическим решением (17) с оптимальным начальным условием $x_0 = x_1$. Однако при этом определенным изменениям подвергнутся все члены расчетного динамического ряда X, что на практике иногда может быть расценено как явление нежелательное.

Тогда логично провести дихотомию периода наблюдений по признаку отсутствия/наличия изменений в макроэкономических данных, то есть выбрать граничную точку $t = \tau \leq T$, разделяющую два указанных подпериода. Для подпериода $t = 1\div\tau$ следует сохранить все исходные данные и ранее полученные результаты бенчмаркинга, а для подпериода $t = (\tau+1)\div\theta$ - выполнить актуальные расчеты по формуле общего аналитического решения (14) с естественным начальным условием $x_0 = X_\tau/I_\tau = x_\tau$, которое обеспечивает относительно гладкое сцепление двух частей расчетного динамического ряда x при $t = 1\div\tau$ и $t = (\tau+1)\div\theta$. Известной «платой» за дихотомию, разумеется, является некоторое увеличение квадратичной вариации сцепленного динамического ряда x по сравнению с квадратичной вариацией оптимального решения (17), рассчитанного для всего периода имеющихся наблюдений.

Выше отмечалось, что выбор начального условия бенчмаркинга в виде произвольной константы сопряжен с нарушением свойства идемпотентности пропорционального метода Дентона. Однако здесь метод Дентона выступает не в своей обычной редакции, а в качестве последовательного двухэтапного алгоритма, первая часть которого определяется идемпотентным оператором (17). Поэтому в случае заранее согласованного набора исходных данных на первом этапе работы алгоритма (при $t = 1\div\tau$) получаем $x_\tau = 0$, и вторая часть алгоритма [при $t = (\tau+1)\div\theta$] немедленно преобразуется из общего аналитического решения (14) с начальным условием в виде произвольной константы в идемпотентный оператор (15).

Характеризуя вычислительные аспекты предложенного в настоящей работе общего аналитического решения (14) задачи бенчмаркинга макроэкономического ряда, нельзя не подчеркнуть его высокую эффективность при обработке динамических рядов с месячной (или даже более высокой) периодичностью, поскольку расчеты по формулам (14), (15) или (17) сводятся к обращению симметричной матрицы порядка K и лишь несущественно усложняются с ростом n. Далее, для элиминирования эффекта масштаба измерения рассматриваемого макроэкономического показателя и повышения точности вычислений целесообразно нормировать исходные динамические ряды I и A на некоторую подходящую константу, например разделив все их члены на опорную годовую оценку A_1.

Полученное аналитическое решение задачи бенчмаркинга макроэкономического ряда обладает известной гибкостью, которая обеспечивается двумя контурами экзогенной адаптации к данным с помощью весовых коэффициентов целевой функции и универсального начального условия реализации пропорционального метода Дентона. В связи с этим основные результаты, изложенные в настоящей статье, могут оказаться полезными при разработке и комплексировании интегрированных многомерных методов бенчмаркинга и балансировки макроэкономических данных [1, par. 6.46].

В заключение следует также отметить потенциальную возможность использования полученных результатов для улучшения математического обеспечения и расширения функциональных возможностей реализации пропорционального метода Дентона в специализированных статистических пакетах прикладных программ.

Литература

1. Quarterly National Accounts Manual: Concepts, Data Sources, and Compilation / Adriaan M. Bloem, Robert J. Dippelsman, Nils O. Maehle.- Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2001.– 210 p. (Имеется перевод на русский язык: Руководство по квартальным национальным счетам: концепции, источники данных и составление: Пер. с англ. / Э.М. Блум, Р.Дж. Диппелсман, Н.Э. Меле.- Вашингтон, округ Колумбия, США: МВФ, 2001. - 222 с.)

2. **Denton F.T.** Adjustment of Monthly or Quarterly Series to Annual Totals: An Approach Based on Quadratic Minimization // Journal of the American Statistical Association.- 1971. Vol. 66. No. 333. P. 99-102.

3. **Dagum E.B., Cholette P.A.** Benchmarking, Temporal Distribution, and Reconciliation Methods for Time Series / / Lecture Notes in Statistics № 186. - New York: Springer Science+Business Media, 2006. - 409 p.

УРОВЕНЬ И УКЛАД ЖИЗНИ СЕЛЬСКОГО НАСЕЛЕНИЯ: ОЦЕНКА ТРАНСФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ ПОТРЕБЛЕНИЯ

В.Л. Шабанов, *канд. экон. наук,*
Институт аграрных проблем РАН (г. Саратов)

Существуют разные подходы к определению понятия «уровень жизни» и к разработке методик его оценки [1]. *Один из них* связан с анализом потребления и его структуры. В рамках данного подхода уровень жизни интерпретируется через набор показателей, характеризующих объемы потребления различных товаров и услуг, расходы на их приобретение, цены на них, доходы потребителей и др. Приоритетность характеристик потребления при оценках уровня жизни признается определяющей многими исследователями [2, с. 5].

Согласно *другому подходу,* уровень жизни следует определять не через отождествляемые с ним показатели (доходов, потребления и проч.), а через совокупность видов деятельности, осуществляемых людьми [1]: поток событий и процессов, происходящих в жизни человека, интерпретируется здесь как определенный уклад жизни, выбранный человеком среди совокупности возможных и доступных.

В настоящей работе оценки уровня жизни на основе анализа структуры потребления были осуществлены с использованием статистики бюджетов домохозяйств Росстата [3, 4]. Для анализа уклада жизни, понимаемого как «поток событий и процессов», разворачивающихся во времени, была использована статистика бюджетов времени населения РФ [4, 5].

В рамках первого подхода эффективно решается проблема «шкалы эквивалентности»: статистика доходов и расходов за разные годы по разным регионам и странам становится сопоставимой; оценки, сделанные на основе анализа структуры потребления, - нечувствительными к инфляции и т. д. [6, 7]. Кроме того, он достаточно хорошо разработан: основные закономерности потребления, связанные с уровнем жизни, известны, по крайней мере, с XIX века [8, с. 101]. Одна из самых популярных закономерностей - правило Э. Энгеля - связывает уровень жизни и продовольственные расходы: с ростом уровня жизни семьи «ее расходы на продукты питания увеличиваются, но эти расходы составляют все меньшую часть дохода»[1]. Для оценок уровня жизни по правилу Энгеля будут взяты аналоги

[1] Orshansky M. Who is among the poor: a demographic view of poverty //Social Securiity Bulletin. July 1965. № 28: Цит. по [6].

показателей «доходов» и «расходов на продукты питания» - соответственно «расходы на конечное потребление» и «расходы на питание» (рублей на человека в месяц). Использование показателей, связанных с *конечным потреблением*, то есть учитывающих натуральные поступления, объясняется спецификой сельского уклада жизни: если влияние натуральных поступлений на потребление горожан пренебрежимо мало и не влияет на оценки уровня жизни, то их неучет по отношению к сельским домохозяйствам может привести к завышению оценок уровня жизни по правилу Энгеля.

Значения отобранных показателей приводятся Росстатом в разрезе децильных групп, образованных путем разбиения всей совокупности участвующих в бюджетном обследовании домохозяйств, упорядоченных по показателю располагаемых ресурсов, на 10 групп одинаковой численности.

Из сформулированного выше правила Энгеля следует, что если взять в качестве абсцисс точек $(x^{(k)}, y^{(k)})$ среднедушевые конечные расходы домохозяйств k-й децильной группы за определенный год, а в качестве ординат - среднедушевые расходы на питание по той же децильной группе за тот же год и соединить эти точки, то получится выпуклая возрастающая кривая.

Для регрессионной аппроксимации подобных кривых может быть использована степенная функция, удовлетворяющая всем требованиям, налагаемым на вид функций спроса [9]:

$$y = Cx^{\alpha}\,, \tag{1}$$

которая представляет собой функцию регрессии продовольственных расходов y на конечные расходы x и в которой параметр α лежит в пределах от 0 до 1 и интерпретируется как эластичность продовольственных расходов y по конечным расходам x.

Следует отметить, что степенные функции одинаково хорошо аппроксимируют кривые зависимости не только низко-, но и высокоэластичных видов расходов от конечных расходов [9; 10, с. 143-145]. Графическое представление в системе координат «конечные расходы - конкретный *высокоэластичный* вид расходов» даст вогнутые возрастающие кривые, для аппроксимации которых используются степенные функции (1) с параметром $\alpha>1$.

Последнее замечание может быть использовано в условии суммирования, состоящем в том, что коэффициенты эластичности должны удовлетворять следующему соотношению (2) при условии бюджетного ограничения (3) [11, с. 127-128; 12]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x}\alpha_i = 1 & (2) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = x\,, & (3) \end{cases}$$

где x - конечные расходы; y_i - i-й вид расходов; n - общее количество видов расходов; α_i - эластичность i-го вида расходов по конечным расходам.

С учетом замечания, к выражению (2) может быть применена формула (1); тогда оно сведется к равенству единице суммы производных от степенных функций, построенных как регрессии конкретных видов расходов на конечные расходы, в любой фиксированной точке. Таким образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i x^{\alpha_i - 1} = \sum_{i=1}^{n} y_i{}' = 1 & (4) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = x\,. & (5) \end{cases}$$

График, изображающий кривые зависимости расходов на питание от конечных расходов (см. рис. 1), свидетельствует о том, что за исключением 2009 г. в каждый последующий год точки, соответствующие значениям показателей по одним и тем же децильным группам, сдвигаются вправо и вверх, то есть расходы на питание и конечные расходы по соответствующим децильным группам год от года увеличиваются. Такое погодовое увеличение расходов может быть отражением как роста уровня жизни, так и роста инфляции. Если увеличение расходов отражает рост уровня жизни, то по логике реализуемого подхода увеличение конечных расходов должно происходить быстрее, чем увеличение расходов на питание. В этом случае наклон кривой за последующий год должен быть ниже наклона кривой за предыдущий год - по одним и тем же децильным группам. Аналитическим выражением наклона кривой является первая производная; сопоставление ее значений в *соответствующих* точках (например, в одинаковых по номеру децильных группах,

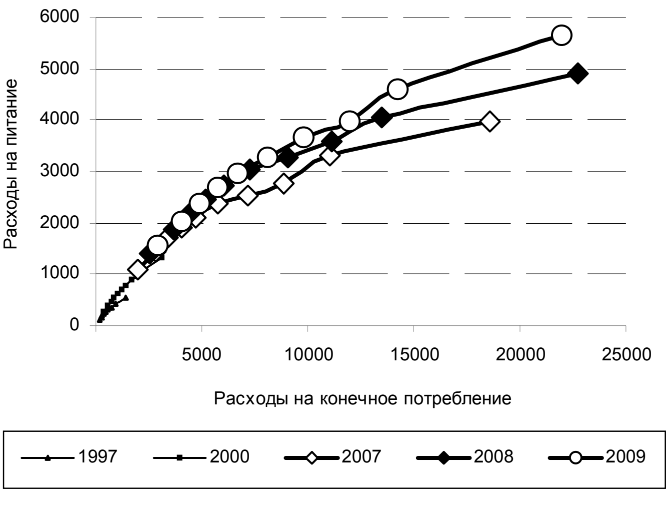

Рис. 1. **Кривые зависимости между показателями расходов на питание и конечных расходов по РФ** (рублей на человека в месяц)

в точке $x_{ср.}$ и др.) за разные годы позволит определить, как менялся уровень жизни за эти годы: снижение значений производной будет означать увеличение уровня жизни, возрастание - его уменьшение. Возрастающий характер регрессионной кривой позволяет определить нижнюю границу изменения производной, а условие суммируемости (4) - верхнюю: соответственно 0 и 1 (см. рис. 1).

Таким образом, производная степенной функции, построенная как регрессия продовольственных расходов на конечные расходы, является индикатором, характеризующим уровень жизни. Чтобы избежать не очень удобной обратной зависимости между динамикой значений производной и динамикой уровня жизни, в качестве индикатора уровня жизни берется искомая производная, вычтенная из единицы:

$$I_{ур.} = 1 - y' = 1 - C\alpha x^{\alpha-1}. \quad (6)$$

Здесь y' может интерпретироваться как предельная полезность продовольствия (или предельная норма потребления продовольствия) для заданных конечных расходов, которая, очевидно, будет снижаться по мере увеличения его доступности [13, с. 51]. Одновременно с этим $I_{ур.} = 1 - y'$ может интерпретироваться как мера насыщения потребности в продовольствии. Значения индекса, близкие к 1, означают, что насыщенность потребности в продуктах питания предельно высокая; расходы на питание приблизительно одинаковы во всех слоях населения и не зависят от уровня их конечных расходов: $\frac{dy}{dx} = 0$, и $I_{ур.}$=1.

В представленной формуле (6) модель оценки уровня жизни является трехпараметрической: к двум параметрам степенной регрессионной функции добавляется третий - значение аргумента в сопоставляемой точке. В то же время условие (4) с учетом (5) позволяет упростить модель, уменьшив число ее параметров до двух: если рассмотреть только два вида расходов - «на питание» и «прочих», то соотношение (4) запишется в виде:

$$t\,\alpha_1 + (1-t)\,\alpha_2 = 1, \quad (7)$$

где t - доля расходов на питание в конечных расходах; α_1 - эластичность расходов на питание по конечным расходам; α_2 - эластичность всех прочих расходов по конечным расходам.

Отсюда доля

$$t = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (8)$$

определяет значение конечных расходов, при котором для двумерного случая условие (4) выполняется точно.

Итак,

$$I_{ур.} = 1 - y' = 1 - \alpha_1 t = 1 - \alpha_1 \frac{1-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (9)$$

Индикатор в формуле (9) является более простым и эффективным, чем в формуле (6). Будем считать формулу (9) основой для оценок уровня жизни по данной модели.

Динамика значений индикатора $I_{ур.}$ (см. таблицу 1) характеризует изменение уровня жизни в РФ за период 1997-2009 гг. Можно видеть, что в 1998 г. наблюдалось снижение уровня жизни как реакция на августовский кризис, после чего в течение 3-4 лет происходило его восстановление. В 2002 г. докризисный уровень жизни был превышен и продолжал расти до 2007 г., после которого последовал спад.

Таблица 1

Индекс уровня жизни, рассчитанный для показателей расходов на питание (*y*) и конечных расходов (*x*), по РФ

Год	Уравнение регрессии	Индекс уровня жизни $I_{ур.}$
1997	$y = 2{,}99x^{0{,}729}$	0,597
1998	$y = 1{,}90x^{0{,}821}$	0,498
1999	$y = 2{,}04x^{0{,}822}$	0,505
2000	$y = 2{,}75x^{0{,}776}$	0,565
2001	$y = 3{,}32x^{0{,}760}$	0,574
2002	$y = 4{,}85x^{0{,}709}$	0,632
2003	$y = 5{,}92x^{0{,}683}$	0,665
2004	$y = 6{,}80x^{0{,}668}$	0,686
2005	$y = 8{,}35x^{0{,}642}$	0,720
2006	$y = 11{,}15x^{0{,}609}$	0,750
2007	$y = 16{,}51x^{0{,}566}$	0,784
2008	$y = 19{,}40x^{0{,}560}$	0,786
2009	$y = 11{,}25x^{0{,}627}$	0,752

Динамика значений индикатора $I_{ур.}$ в разрезе села и города в 2003-2009 гг. (см. таблицу 2) свидетельствует о большей уязвимости сельских жителей перед последствиями кризиса: спад уровня жизни там более глубокий, чем в городе, и зафиксирован на год позже.

Таблица 2

Индекс уровня жизни, рассчитанный для показателей расходов на питание (*y*) и конечных расходов (*x*), в разрезе села и города, по РФ

Год	Индекс уровня жизни $I_{ур.}$	
	село	город
2003	0,544	0,690
2005	0,608	0,742
2007	0,687	0,803

Окончание таблицы 2

Год	Индекс уровня жизни $I_{ур.}$	
	село	город
2008	0,679	0,808
2009	0,628	0,776

Реализованный подход может быть применен и для формализации других закономерностей потребления: регрессионные кривые, построенные для большинства из них, являются возрастающими, и, благодаря условию (4) (независимо от формы кривых - выпуклые для низкоэластичных видов расходов, вогнутые для высокоэластичных), индикатор будет меняться в пределах от 0 до 1.

Выделив из показателя «расходы на питание», участвовавшего в анализе уровня жизни по правилу Энгеля, две составляющие - денежные расходы на покупку продовольствия и его натуральные поступления в семью, главным образом из личного подсобного хозяйства (ЛПХ), можно связать их совместную динамику с динамикой уклада жизни сельского населения. Собственное производство в ЛПХ является существенной и важной частью сельского уклада жизни. Причем несмотря на значительную роль в формировании местных продовольственных рынков, товарность ЛПХ остается невысокой, что делает его преимущественно потребительским хозяйством [14].

В 1997 г. Госкомстат России принял новую методику проведения бюджетных обследований, соответствующую современным подходам в мировой статистике. В ней были смещены акценты: вместо общего объема натуральных поступлений продуктов питания в домохозяйство в опросном листе фиксировалась только та их часть, которая потреблялась внутри семьи. Несколькими годами позже был принят закон «О личном подсобном хозяйстве» (ФЗ № 112 от 07.07.2003), в котором подтверждался преимущественно потребительский характер приусадебного производства: ЛПХ рассматривалось в нем как «форма непредпринимательской деятельности, ведущейся членами семьи - владельца ЛПХ».

Таким образом, согласно современному подходу, ЛПХ - это приусадебное хозяйство, имеющее целью обеспечение сельской семьи продуктами питания и с этой точки зрения представляющее собой более ранний, традиционный уклад жизни.

Вследствие общего роста экономики, появившихся новых возможностей заработка, а также постепенной потери доступа к льготным источникам ресурсов для ведения личного подсобного хозяйства преимущественно потребительская ориентация ЛПХ становится невыгодной. В результате происходит сокращение приусадебного производства; одновременно с этим часть ЛПХ специализируются на товарном производстве определенных продуктов, прежде всего мяса и картофеля, в пригородных селах - овощей, фруктов и ягод. Становится распространенным, когда сельское домохозяйство держит скот исключительно на продажу; собственное же потребление мяса обеспечивает за счет покупок. Постепенно самостоятельное производство из средства выживания становится либо важным источником денежного дохода, либо утрачивает сколько-нибудь значимую роль в жизнеобеспечении сельской семьи.

К настоящему времени самообеспечение продовольствием горожан стало весьма низким. Одновременно с этим снизилась потребительская роль ЛПХ и в сельской местности, где домохозяйства увеличивают расходы на покупку продовольствия, не производимого в ЛПХ, а в структуре их потребления происходит обратное замещение самостоятельно произведенных продуктов питания на купленные. Так, за 1997-2009 гг. доля натуральных поступлений в конечных расходах городских домохозяйств РФ снизилась с 7 до 2,3%, сельских - с 32 до 12,8% [3]. Только в течение 2003-2009 гг. доля натуральных поступлений продуктов питания в общем объеме их потребления сельскими семьями в РФ сократилась для мяса и мясопродуктов с 43 до 35%, молока и молочных продуктов - с 61 до 39%, овощей и картофеля - с 79-90% до 73-87%; держалась на одном уровне - в 45% - для яиц и возросла для фруктов и ягод с 21 до 44%[2].

Снижение доли натуральных поступлений в потреблении продовольствия в наблюдаемый период объясняется не только постепенными изменениями потребительских предпочтений при росте уровня жизни, характеризуемыми возрастанием расходов на покупку продуктов питания, не производящихся в ЛПХ, но и структурными изменениями в сельской местности, связанными с постепенным вытеснением традиционного аграрного уклада жизни. Данный процесс может быть проанализирован в рамках предложенной выше модели с использованием показателей, связанных с ЛПХ: в качестве результирующей переменной берется «стоимость потребленных продуктов питания, поступивших в натуральной форме из ЛПХ», в качестве факторной - «сумма оцененных натуральных поступлений из ЛПХ и денежных расходов на покупку продовольствия»:

$$I_{укл.} = \alpha_1 \frac{1-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \qquad (10)$$

где α_1 и α_2 - эластичности соответственно стоимости натуральных поступлений продуктов питания из ЛПХ и денежных расходов на их покупку по стоимости их общего объема поступлений в домохозяйство.

[2] Рассчитано с использованием микроданных; см. [4].

В формуле (10) $I_{укл.}$ является индексом аграрного уклада жизни; его рост означает аграризацию уклада жизни в сельской местности, снижение связано с уменьшением значимости сельского хозяйства в жизнедеятельности сельского населения.

Расчеты на основе общероссийской бюджетной статистики за 2003-2009 гг., включающей в себя данные по всем регионам РФ[3], демонстрируют непрерывное уменьшение значимости аграрного уклада в деревне, в том числе в 2008-2009 гг., когда наблюдалось снижение уровня жизни (см. таблицу 3).

Таблица 3

Индикатор аграрного уклада, рассчитанный для показателей оцененных натуральных поступлений продуктов питания из ЛПХ (y) и общего объема поступлений продовольствия в домохозяйство (x), по сельской местности РФ

Год	Уравнение регрессии	Индикатор аграрного уклада жизни сельского населения $I_{укл.}$
2003	$y = 18,0x^{0,718}$	0,265
2005	$y = 16,1x^{0,728}$	0,239
2007	$y = 116,2x^{0,589}$	0,169
2008	$y = 173,5x^{0,562}$	0,144
2009	$y = 231,9x^{0,545}$	0,138

Обследование бюджетов времени[4] позволяет проанализировать основные черты уклада жизни сельского населения в сопоставлении с городским. Наиболее существенные различия в структуре временных затрат сельских и городских жителей трудоспособного возраста (старше 14 лет) связаны с ведением домашних дел, работой и отдыхом:

- домашние дела отнимают у сельских жителей соответственно 3,8 часа против 2,6 часа в будни и 5 часов против 3,7 часа в выходные дни. Селяне дольше убирают помещения, готовят пищу; в отличие от горожан - занимаются ведением ЛПХ. При этом в селах меньше времени тратят на покупку товаров и получение услуг, очевидно из-за их малого предложения;

- в будни сельские жители затрачивают на работу соответственно 4 и 5 часов. Учитывая, что в выборке доли трудоспособного городского и сельского населения совпадают, можно говорить о более высоком уровне безработицы в сельской местности;

- у сельских жителей трудоспособного возраста меньше свободного времени, чем у городских, - соответственно 3,5 против 3,7 часа в будние дни и 4,8 часа против 5,8 часа в выходные. У обеих категорий населения оно в основном тратится на общение, отдых, спортивные игры, компьютерную деятельность, просмотр телевизионных передач и чтение. О доступности различных видов досуга можно судить по рис. 2. Сельские жители чаще городских бывают на концертах, посещают библиотеку и спортзал. Рестораны, кино, театр, музеи гораздо доступнее горожанам.

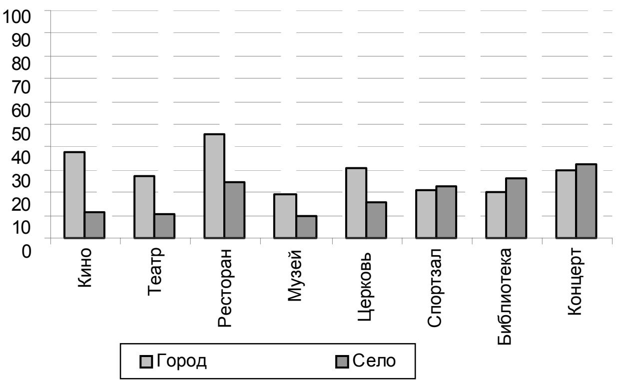

Рис. 2. **Доля респондентов, посетивших рассматриваемые учреждения досуга хотя бы один раз за год** (в % от общего числа респондентов)

Итак, в сельской местности по сравнению с городской выше безработица. Вместе с тем сельские жители имеют меньше свободного времени, и его труднее качественно заполнить. Особенно много сил у них уходит на ведение домашних дел. Структура бюджета времени свидетельствует о большей архаичности уклада жизни селян.

Доступность работы и ее характер являются важнейшими факторами, определяющими уровень и уклад жизни.

По данным выборочного обследования бюджетов времени, оплачиваемой работы не имели 18,1% городских и 25,7% сельских респондентов трудоспособного возраста (15-59 лет для мужчин, 15-54 года для женщин). Без учета учащихся и студентов, в основном молодежи 15-22 лет, доли безработных среди городских и сельских жителей составили 10,1 и 17,2%.

Почти 20% занятых сельских жителей трудоспособного возраста имели работу вне сел проживания.

Лишь 13,1% работали в сельскохозяйственной отрасли.

Тенденция сокращения роли аграрного сектора в структуре занятости сельского населения является объективной для поступательно развивающегося общества. С течением времени село постепенно трансформируется, последовательно проходя через стадии,

---

[3] Рассчитано с использованием агрегированных данных; см. [4].

[4] Расчеты проводились с использованием базы данных по бюджетам времени по респондентам в разрезе города и села, размещенной на сайте Росстата [4].

характеризующиеся степенью урбанизированности и невовлеченности населения в сельхозпроизводство [15]. При этом процесс замещения сельского хозяйства другими отраслями экономики происходит гораздо медленнее, о чем свидетельствует не только высокий процент безработных и высокая доля селян, работающих вне сел проживания, но и сложившаяся структура занятости, в которой наблюдается явный дефицит рабочих мест, связанных с промышленностью и сферой услуг (см. таблицу 4).

Таблица 4

Распределение сельских и городских респондентов по направлениям экономической деятельности
(в % от общего числа занятых)

Направления экономической деятельности	Село	Город
Управление, безопасность, соцобеспечение	15,6	9,3
Образование	13,7	6,2
Сельское хозяйство	13,1	0,0
Здравоохранение	8,3	8,5
Розничная торговля	7,5	14,3
Энергетика	6,4	4,1
Обрабатывающая промышленность	5,6	16,4
Транспорт	4,8	5,4
Строительство	3,7	8,7
Прочие	21,3	27,1

Одновременно с этим значительная часть сельских респондентов охарактеризовала свою работу как «очень тяжелую» и «тяжелую» (см. таблицу 5).

Таблица 5

Распределение сельских и городских респондентов по характеристике тяжести выполняемой работы
(в % от общего числа занятых)

Характеристика работы по физическим затратам	Село	Город
Очень тяжелая и тяжелая	17,1	11,7
Средняя	50,1	48,0
Легкая	32,8	40,3

Итак, согласно бюджетной статистике, на уклад жизни сельского населения влияют следующие факторы: медленная диверсификация сельской экономики, ведущая к безработице и оттоку из села наиболее квалифицированной и образованной рабочей силы; ограниченный доступ к современным благам; достаточно архаичная структура бюджета времени и остающаяся высокой роль ЛПХ в обеспечении сельской семьи.

Литература

1. **Подузов А.А.** Концепции уровня жизни: очерк современных представлений // Проблемы прогнозирования. 2008. № 6. С. 69-84.

2. **Жеребин В.М., Ермакова Н.А.** Уровень жизни населения - как он понимается сегодня // Вопросы статистики. 2000. № 8. С. 3-11.

3. Российский статистический ежегодник: Стат. сб. / / Росстат. - М., 1996-2010. Раздел «Уровень жизни».

4. Микроданные обследования бюджетов времени населения за 2008 г.. URL: http://www.micro-data.ru (дата обращения 02.10.2010).

5. Итоги пилотного выборочного обследования использования (бюджета) времени населением. - М.: Федеральная служба государственной статистики, 2010. URL: http://www.gks.ru/doc_2010/bul_dr/btime10.doc.

6. **Подузов А.А., Кукушкин Д.К.** Шкала эквивалентности как инструмент измерения уровня жизни // Проблемы прогнозирования. 2000. № 4. С. 108-123.

7. **Прокопьев М.Г.** Потребление продовольствия и эффект масштаба домашних хозяйств // АПК: экономика, управление. 2009. № 2. С. 20-31.

8. **Суринов А.Е.** Статистика доходов населения. - М.: ЗАО «Финстатинформ», 2001. - 239 с.

9. **Суворов А.В., Соловьев А.М.** Прогнозирование структуры расходов населения на товары и услуги // Проблемы прогнозирования. 2011. № 1. С. 104-114.

10. **Гранберг А.Г.** Моделирование социалистической экономики. - М.: Экономика, 1988. - 487 с.

11. **Боков О.Г.** Риск. Рынок. Инвестиции. - Саратов: Изд-во В.П. Латанова, 2005. - 156 с.

12. **Андрющенко С.А., Трифонова Е.Н.** Оценка состояния и прогнозирования динамики рынков взаимозаменяемых продовольственных товаров. - Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2005. - 168 с.

13. **Носко В.П.** Эконометрика: Элементарные методы и введение в регрессионный анализ временных рядов. - М.: ИЭПП, 2004. - 501 с.

14. **Зинченко А.П.** Доходы и воспроизводство в сельском хозяйстве России // Вопросы статистики. 2010. № 8. С. 68-77.

15. **Калугина З.И.** От государственного патернализма к саморазвитию: контуры концепции сельского развития // //Роль инноваций в развитии агропромышленного комплекса (Никоновские чтения 2008). - М.: ВИАПИ, «Энциклопедия российских деревень», 2008. С. 596-603.

АЛГОРИТМ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛНОГО ПРИРОСТА МЕЖДУ ФАКТОРАМИ*

А.В. Орлов, *канд. экон. наук,*
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Практически одновременно с возникновением индексного метода встала задача по разделению дополнительного приращения между вызвавшими его факторами. Считается, что индексный анализ влияния факторов представляет белое пятно в теории статистики и это связано с отсутствием обоснованного разложения полного прироста по факторам - проблема, которая длительное время не поддается решению. Для подобных случаев учеными предложен ряд способов по определению влияния долей остаточного члена на факторы, но «Различные предложения… не были логически безупречно мотивированы и остались не принятыми»[1]. Варианты по распределению остаточного члена известны под рубрикой «Экономический факторный анализ»[2].

Математическое выражение данного явления представим в общепринятых обозначениях.

Имеется два независимых компонента X и Y, произведение которых равно Z. Их начальные значения обозначим как X_0, Y_0, Z_0; последующие - через X, Y, Z. Переход от начальных величин к последующим является минимально-дискретным, и между ними не существует промежуточных значений, то есть предполагается дискретное изменение величин. Абсолютный прирост обозначим соответственно через $\Delta x = X - X_0$; $\Delta y = Y - Y_0$; $\Delta z = Z - Z_0$. Общий прирост находим по формуле: $Z_0 + \Delta z = (X_0 + \Delta x)\times(Y_0 + \Delta y)$. После умножения и сокращения приходим к формуле: $\Delta z = \Delta x Y_0 + \Delta y X_0 + \Delta x \Delta y$ (1).

С целью упрощения дальнейших выкладок представим компоненты и факторы в относительных величинах - темпах роста: I_x, I_y, I_z и темпах прироста: i_x, i_y, i_z. Любые числа, в том числе как бесконечно малые величины (б. м. в.), так и бесконечно большие величины (б. б. в.), можно представить в относительных величинах; от этого они не теряют ни свою однородность, ни свою значимость, ни своих свойств и качеств. В данном случае имеет место перенесение исследования в иную область измерения.

Начальные значения темпов роста I_{x0}, I_{y0}, I_{z0} равны единице, а темпов прироста - нулю. Разделив выражение (1) на $X_0Y_0 = Z_0$, получаем: $\Delta z/Z_0 = \Delta x/ X_0 + \Delta y/Y_0 + \Delta x\Delta y/ X_0Y_0$, каждая часть которого в темпах прироста равна: $i_z = \Delta z/Z_0$, $i_x = \Delta x/X_0$, $i_y = \Delta y/Y_0$. В относительных приростных величинах общий, или полный прирост выражает формула: $i_z = i_x + i_y + i_x i_y$ (2), где $i_x i_y$ - остаточный, или дополнительный член - результат взаимодействия независимых факторов (в статистике называется «неразложимым остатком»).

Если из зависимости (2) выделить остаточный член в качестве самостоятельной и вполне конкретной величины, то он может быть разделен на части с помощью действий элементарной математики с последующим присоединением этих частей к определяющим их факторам. Речь идет о представлении «числа - произведения» через сумму однородных слагаемых, равных количеству сомножителей.

Требуется распределить остаточный член между факторами i_x и i_y единственно обоснованным методом с тем, чтобы получить сумму из двух приведенных значений: $i_z = i^{пр}_x + i^{пр}_y$ (3), где $i^{пр}_x = i_x + K_1 i_x i_y$; $i^{пр}_y = i_y + K_2 i_x i_y$ при $K_2 = 1 - K_1$, каждое из которых включало бы только ему присущие однородные значения факторов, соответствующие либо i_x, либо i_y, то есть требуется найти единственное решение в виде суммы двух слагаемых. В данном случае стоит задача расчленения всей величины явления на части, приходящиеся на каждый из факторов. По указанной проблеме в литературе сложилось мнение, что совокупный результат действия двух факторов *невозможно* представить в виде двух слагаемых, каждое из которых отражало бы действие только одного, изолированно взятого фактора, то есть получить однозначное решение в виде функции: $i_x i_y = \phi(i_x) + \phi(i_y)$[3]. Иначе говоря, задачу относят к нерешаемым проблемам. Правда, существует и иное мнение, согласно которому согласиться с подобными утверждениями полностью нельзя[4], и задачу следует считать нерешенной.

С целью упрощения дальнейших выкладок произведем замену: $i_z = c;\ i_x = a;\ i_y = b;\ i_x i_y = ab$; тогда формула (2) примет вид: $c = a + b + ab$.

---

* Основу данной статьи составляет исследование, опирающееся на принципы нестандартного анализа, положения конструктивной математики и структурализма. См.: Орлов А.В. К обоснованию степенного метода определения долей остаточного члена // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. 2010. № 2-2 (100). С. 165-171.

[1] Экономическая энциклопедия. Политическая экономия. Т. 1. / Гл. ред. А.М. Румянцев. М.: Советская энциклопедия, 1972. С. 554.

[2] См.: Блюмин С.Л. и др. Экономический факторный анализ. Липецк: ЛЭГИ, 2004. - 148 с.

[3] См., например: Писарев И.Ю. Важное и актуальное начинание // Вопросы экономики. 1956. № 6. С. 152; Перегрудов В.Н. Разложение абсолютных приростов по факторам // Ученые записки по статистике. 1959. Т. V. С. 70; Казинец Л.С. Теория индексов. М.: Госстатиздат, 1963. С. 158; Раяцкас Р.Л., Плакунов М.К. Количественный анализ в экономике. М.: Наука, 1987. С. 135-136 и др.

[4] См.: Виноградова Н.М. О применении индексов в аналитических расчетах // Ученые записки по статистике, 1963. Т. VII. С. 213.

Причина неудач по разделению остаточного члена между вызвавшими его факторами в основном обусловлена сопоставлением значений a и b, имеющих линейную размерность (например, метры), со значением произведения ab, выражающего площадь (метры в квадрате). Данные величины, как правило, несоизмеримы и несопоставимы, поэтому проблема оказывается неопределенной и не получила решения. Положительный подход связан с выяснением сущности явления.

Задача состоит в обосновании метода по точному и однозначному определению доли влияний каждого в отдельности фактора на результирующий показатель (общий прирост - i_z). Алгебраическим путем предполагается получить *алгоритм*, с помощью которого достигается однозначный результат вычисления долей остаточного члена и их участие в определении приведенных значений факторов. *Алгоритм позволит разложить приращение функции нескольких независимых переменных на равное числу сомножителей количество независимых слагаемых.* Каждое слагаемое должно обладать однородными признаками, и каждое из них содержит только ему присущую величину влияния на результирующий показатель. Вопрос касается установления правил по определению долей независимых слагаемых, в соответствии с которыми формируется величина остаточного члена.

В качестве *необходимого признака* по определению долей остаточного члена принимаем условие о независимости определяющих его частей. Каждая доля включает только однородные и однопорядковые составляющие. В качестве *достаточного признака* принимаем условие об ограничении его величины конкретными границами, выход за которые недопустим.

Соблюдение необходимого и достаточного условия принимаем за выполнение критерия достоверности по определению долей остаточного члена. На конкретном примере покажем, что существует возможность разложения остаточного члена (дополнительного прироста) между факторами с учетом выполнения критерия достоверности.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и b, диагональ которого d равна $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. На этой диагонали строим квадрат, площадь которого равна: $a^2 + b^2$. Это означает, что площадь квадрата поделена кривой линией L на части a^2 и b^2, то есть площадь квадрата складывается из двух частей в отношении a^2/ b^2. Перед нами деление площади (произведения $d\times d$) на две части, каждая из которых отражает величину только однородного фактора. Но квадрат является частным случаем прямоугольника, одна из сторон которого представляет сторону квадрата. В общем случае площадь прямоугольника делится в том же отношении, что и площадь квадрата со стороной $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, то есть в том же самом отношении. Разделение площади прямоугольника (как и квадрата) на основе теоремы Пифагора между его составными частями (a^2/b^2) возможно только одним единственным способом при условии, что линия L проходит из одного угла прямоугольника к противоположному. Часть площади прямоугольника, прилегающая к стороне a, равна $S_a = a^2b^2/(a^2 + b^2)$ (4); прилегающая к стороне b равна $S_b = b^2\mathrm{ab}/(a^2 + b^2)$ (5); сумма этих площадей определяет величину остаточного члена[5]. Доли площади остаточного члена определены точно и однозначно: одна часть пропорциональна только a^2, другая - b^2.

Пропорцию, в соответствии с которой находится площадь остаточного члена (ab) относительно суммы квадратов ($a^2 + b^2$), принимаем за алгоритм. Для двухфакторной функции он равен: $\boldsymbol{Ал = ab/(a^2 + b^2)}$ (6) и получен в результате строго последовательных операций. Учтем следующий момент: a и b - независимые первичные величины, поэтому и переход ко вторичным: от a к a^2 и от b к b^2 - выражает однородные члены одного семейства, следовательно, и отношения: $n = a/b$ и $n^2 = a^2/b^2$ - остаются независимыми величинами. Заменив в выражении (6) a на nb, придадим формуле *алгоритма* простой и изящный вид: $Ал = n/(n^2 + 1)$. Представленная формула выражает независимое отношение, в котором a и b неоднородны, то есть не подлежат суммированию.

Как следует из формулы *алгоритма* (6), он характеризует удельный вес остаточного члена (прямоугольника) относительно долей квадратов, построенных на смежных сторонах прямоугольника. Числитель *алгоритма* является среднегеометрической величиной по отношению к квадратам (a^2 и b^2), которые определяют границу существования остаточного члена ($a^2 \leq |ab| \leq b^2$), представляя порядковое отношение. Предложенное разделение есть единственно обоснованное решение, поскольку одна часть площади остаточного члена пропорциональна только a^2, а другая - только b^2. При этом остаточный член находится в границах величин, отвечающих за его разделение и четко определяющих его местоположение.

При вещественных значениях a и b доли остаточного члена определяются с помощью *алгоритма* без всякого остатка на основе правил элементарной математики. Наибольший интерес представляет следствие, вытекающее из теоремы Пифагора: как отношение a^2/b^2, так и отношение $ab/(a^2 + b^2)$ представляют безразмерные и постоянные коэффициенты, относящиеся ко всем видам прямоугольников.

В качестве иллюстрации выполнения *необходимого признака* рассмотрим ситуацию с двумя несмеши-

[5] Раскрытие данной зависимости представлено в статье: Орлов А.В. Степенной метод разделения дополнительного прироста между вызвавшими его факторами // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2007. № 3 (51). С. 193-204.

вающимися жидкостями. Каждая из них растекается по соответствующей части площади остаточного члена (CC_1D_1D) и полностью заполняет ее всю. Графическая интерпретация процесса представлена на рисунке, который отражает суть происходящего процесса: понятие «остаточный член» приобретает наглядность.

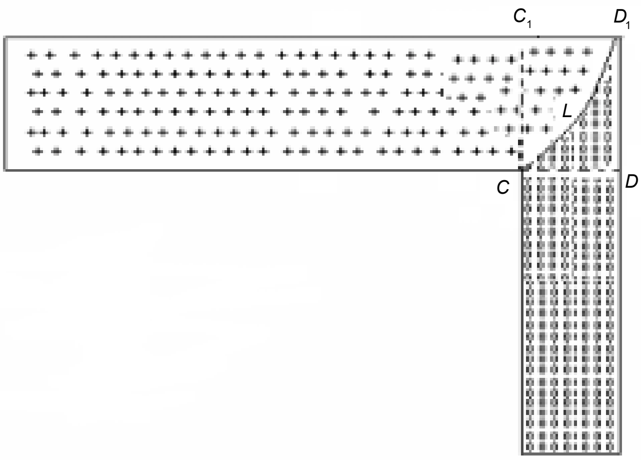

Рисунок. **Образование независимых долей остаточного члена**

Сконструирован объект, имеющий прозрачный геометрический смысл, с помощью которого открывается возможность наглядно представить содержание самого явления - картину разложения остаточного члена между вызвавшими его факторами.

Площадь $CLD_1D = a^2\,ab/(a^2 + b^2)$, а площадь $CC_1LD_1 = b^2\,\mathrm{ab}/(a^2 + b^2)$, каждая из которых является естественным продолжением соответствующих факторов: $i_x{\times}I_{x0}$ и $i_y{\times}I_{y0}$, что наглядно иллюстрирует рисунок; при этом I_{x0} и I_{y0}, по определению, равны единице. В этом случае приведенные значения факторов в темпах прироста составят: $i^{пр}_x = i_x + i_x^3\, i_y /(i_x^2 + i_y^2)$ (7), $i^{пр}_y = i_y + i_x i_y^3 / /(i_x^2 + i_y^2)$ (8) при $i_z= i^{пр}_x + i^{пр}_y$. Только сумма однородных величин будет однозначно соответствовать произведению сомножителей. В данном случае имеет место представление «числа-произведения» через сумму однородных слагаемых, соответствующих количеству сомножителей.

Приведенное решение алгебраически безупречно и геометрически наглядно.

Формула *алгоритма* получена на основе ясного геометрического построения и простых алгебраических преобразований. Это означает, что любое произведение можно обоснованно разложить на сумму слагаемых без остатка при соблюдении необходимого и достаточного признаков (выполнения критерия достоверности). Для этого следует представить любое *число-произведение* частью общей системы, которая включает компоненты (начальные и последующие), их разность в виде факторов и произведение этих факторов - остаточный член. Достоверность решения подтверждается выполнением критерия достоверности: деление остаточного члена происходит в отношении независимых величин: a^2 и b^2, а его величина ab ограничена «снизу» и «сверху» квадратами a^2 и b^2 как среднегеометрической величиной в геометрической прогрессии. Область, ограниченная квадратами a^2 и b^2, включает множество чисел, но только одно из них соответствует значению остаточного члена. Принятое условие удовлетворяет важнейшему требованию к доказательству: оно обозримо и воспроизводимо.

Алгоритм как форма математического выражения представляет стратагему действия. Он представляет общий метод, позволяющий решать по одному и тому же плану любую из задач определенного класса, в данном случае разложение произведения на однородные и сопоставимые слагаемые, равные количеству сомножителей. Достоверность должна быть полной и окончательной, и то, что верно для ab, должно быть верно и для других функций.

Найденные доли остаточного члена позволяют заключить, что его площадь представляет не механическое соединение двух независимых величин (ab), как принято считать, а образуется из двух разнородных долей, содержащих конкретную информацию о своем составе. Происходит не смешивание двух независимых (разнородных) величин, а их присоединение друг к другу. Подтверждением такого метода служит положение, что в основе умножения лежит сложение как более простое и исходное действие. Фактически части остаточного члена «прикрепляются» к своему однородному фактору.

Перейдем от описания модели решения к выяснению структурных закономерностей.

Предложенное решение в виде представления площади (произведения), состоящей из двух неоднородных частей, выходит за рамки собственно математики и обращается к сути самого явления (принцип конструктивизма и структурализма, что означает: просто *числа* не существует, а есть взаимосвязанные и взаимообусловленные структуры). Решение связано с логическим скачком - с переходом от количественного исчисления к качественному анализу явления, и от математических выражений требуется не только строгое доказательство, но и возможность наглядного геометрического построения. При решении усложняющейся задачи пришлось конструировать новую систему понятий: однородные и неоднородные члены произведения, переход от линейной размерности к размерности площадей и объемов. Отсюда вывод: рассмотрение математических проблем не основывается на элементарных очевидностях, оно связано со структурализмом, а именно с постижением структурной сути остаточного члена. Речь идет о форме символического выражения - формуле логического исчисления; о замене выражения (ab), возникающего непосредственно в результате логического анализа из описания схемы, другим выражением: ($a^{пр} + в^{пр}$), удовлетворяющим определенным требованиям строгости и ясности, но в то же время оставаясь эквивалентным первому по своей сути и значимости.

Переход к новой системе исчисления должен быть математически и логически безупречен: в представленном решении имеет место переход от линейной размерности исчисления к исчислению площадей и объемов при рассмотрении многофакторных функций.

Вывод очевиден: чем глубже идея, тем труднее ее постигнуть. Реальность такова: имеет место выражение двух или нескольких сомножителей тем же самым числом слагаемых, каждое из которых содержит только ему присущие однородные члены.

Согласно предлагаемому методу, при исчислении остаточного члена б. м. в. выступают не как переменные и неизвестные величины, к которым не могут быть применены алгебраические действия, а как обычные ощутимо-конкретные величины (главное условие нестандартного анализа). Предложенный алгоритм обеспечивает уточнение окончательного результата при переходе от сомножителей к сумме слагаемых.

Представленное решение подтверждается конструированием нового объекта, на основе которого можно заключить, что фактически единого остаточного члена не существует, а есть две независимые друг от друга величины - доли, суммы которых и определяют величину остаточного члена. Площадь остаточного члена в качестве единицы размерности имеет два различных *квадрата*, между тем как стороны остаточного члена (прямоугольника) имеют другую единицу размерности - *длину*.

Критерием достоверности предлагаемого метода выступает требование по представлению полного прироста (Δz или i_z) в виде суммы приведенных факторов как независимых величин без остатка, то есть без конструирования дополнительных условий и использования метода последовательных приближений. Присоединение долей остаточного члена к факторам и будет соответствовать их приведенным значениям.

Метод должен оставаться справедливым вне зависимости от:

- абсолютных значений анализируемых величин;
- количества задействованных факторов;
- одно- или разнонаправленного действия факторов;
- точности вычисления (ограничивается возможностями измерения).

При определении долей остаточного члена выполнение этих требований обязательно. Результат деления остаточного члена отражает аналогичные изменения факторов, а равенство факторов сопровождается равенством долей остаточного члена.

На основе алгоритма окажется возможным эффективно найти производную функцию при ее существовании с любой степенью точности, то есть однозначно и обоснованно разложить остаточный член между вызвавшими его факторами и от мультипликативной формы перейти к аддитивной с тем же самым числом слагаемых. В качестве подтверждения работоспособности предложенного метода рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Дано число a, которое представим произведением: $1{\times}a$ (остаточный член): $i_x = 1$ и $i_y = a$ (факторы). По формуле: $i_z = i_x + i_y + i_x i_y$ находим: $i_z = 1 + a + a = 1 + 2a$, при: $i^{пр}{}_x = 1 + a/(1 + a^2)$; $i^{пр}{}_y = a + aa^2/(1 + a^2)$, а их сумма равна: $i_z = i^{пр}{}_x + i^{пр}{}_x = 1 + 2a$.

Пример 2. Дано $I_z = I_x I_y$, где темпы роста положительны: $I_x = 1{,}2$; $I_y = 1{,}4$; $I_z = 1{,}68$. Темпы прироста и остаточный член соответственно равны: $i_z = 0{,}68$; $i_x = 0{,}2$; $i_y = 0{,}4$; $i_x i_y = 0{,}08$, то есть $0{,}68 = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}08$. Геометрическая прогрессия имеет вид: 0,04; 0,08; 0,16 (i^2_x, $i_x i_y$, i^2_y), при знаменателе прогрессии $q = 2$. Используя формулы приведенных значений: $i^{пр}{}_x = i_x i_y i^2_x/(i^2_x + i^2_y)$ и $i^{пр}{}_y = i_x i_y i^2_y/(i^2_x + i^2_y)$, находим их числовые значения:

$$i^{пр}{}_x = 0{,}2 + 0{,}08 \times 0{,}04/(0{,}04 + 0{,}16) = 0{,}216;$$
$$i^{пр}{}_y = 0{,}4 + 0{,}08 \times 0{,}16/(0{,}04 + 0{,}16) = 0{,}464;$$
$$i_z = i^{пр}{}_x + i^{пр}{}_y = 0{,}216 + 0{,}464 = 0{,}68.$$

Пример 3. Дано $I_z = I_x I_y$, где темпы роста отрицательны: $I_x = 0{,}8$; $I_y = 0{,}6$; $I_z = 0{,}48$. Темпы прироста и остаточный член соответственно равны: $i_z = -0{,}52$; $i_x = -0{,}2$; $i_y = -0{,}4$; $i_x i_y = 0{,}08$, то есть $-0{,}52 = -0{,}2 - 0{,}4 + 0{,}08$. Геометрическая прогрессия имеет вид: 0,04; 0,08; 0,16. Используя формулы приведенных значений, находим их числовые значения:

$$i^{пр}{}_x = -0{,}2 + 0{,}08 \times 0{,}04/(0{,}04 + 0{,}16) = -0{,}184;$$
$$i^{пр}{}_y = -0{,}4 + 0{,}08 \times 0{,}16/(0{,}04 + 0{,}16) = -0{,}336;$$
$$i_z = i^{пр}{}_x + i^{пр}{}_y = (-0{,}184) + (-0{,}336) = -0{,}52.$$

Пример 4. Дано $I_z = I_x I_y$, где темпы роста разнонаправлены: $I_x = 0{,}8$; $I_y = 1{,}4$; $I_z = 1{,}12$. Темпы прироста и остаточный член соответственно равны: $i_z = 0{,}12$; $i_x = -0{,}2$; $i_y = 0{,}4$; $i_x i_y = -0{,}08$, то есть $0{,}12 = -0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}08$. Геометрическая прогрессия имеет вид: 0,04; 0,08; 0,16. Используя формулы приведенных значений, находим их числовые значения:

$$i^{пр}{}_x = -0{,}2 - 0{,}08 \times 0{,}04/(0{,}04 + 0{,}16) = -0{,}216;$$
$$i^{пр}{}_y = 0{,}4 - 0{,}08 \times 0{,}16/(0{,}04 + 0{,}16) = 0{,}336;$$
$$i_z = i^{пр}{}_x + i^{пр}{}_y = -0{,}216 + 0{,}336 = 0{,}12.$$

При факторах, изменяющихся в противоположных направлениях, закон распределения остаточного члена подчинен общему правилу.

Пример 5. Дано $I_z = I_x I_y$, где темпы роста разнонаправлены, а темпы прироста сравнимы с темпами роста: $I_x = -1{,}0$; $I_y = 2{,}0$; $I_z = -2{,}0$. Темпы прироста и остаточный член соответственно равны: i_z = -3,0; i_x = -2,0; i_y = 1,0; $i_x i_y$ = -2,0, то есть -3,0 = -2,0 + 1,0 - 2,0. Геометрическая прогрессия имеет вид: 4; |2|; 1. Используя формулы приведенных значений, находим их числовые значения:

$i^{пр}_x$ = - 2,0 – 2,0 × 4/5 = -3,6;

$i^{пр}_y$ = 1,0 – 2,0 × 1/5 = 0,6;

$i_z = i^{пр}_x + i^{пр}_y$ = - 3,6 + 0,6 = -3,0.

Исходя из методики разложения для двухмерной функции, несложно вывести *алгоритмы* для функций более высокого порядка, которые идут вослед предшествующим. Для трехфакторной модели он приобретает вид: $\boldsymbol{Ал_3 = i_x i_y i_z/(i_x^3 + i_y^3 + i_z^3)}$ - отношение параллелепипеда к кубам соответствующих ребер. В темпах роста трехфакторная модель имеет вид: $I_w = I_x I_y I_z$. В темпах прироста получаем:

$$i_w = i_x + i_y + i_z + i_x i_y + i_x i_z + i_y i_z + i_x i_y i_z, \qquad (9)$$

с учетом зависимостей (7) и (8) получаем трехчленную формулу: $i_w = i^{пр}_x + i^{пр}_y + i^{пр}_z$, где $i^{пр}_x$, $i^{пр}_y$, $i^{пр}_z$ - приведенные значения темпов прироста трехфакторной модели находятся из выражений:

$$i^{пр}_x = i_x + i_x i_y \frac{i_x^2}{i_x^2 + i_y^2} + i_x i_z \frac{i_x^2}{i_x^2 + i_z^2} + i_x i_y i_z \frac{i_x^3}{i_x^3 + i_y^3 + i_z^3}; \qquad (10)$$

$$i^{пр}_y = i_y + i_x i_y \frac{i_y^2}{i_x^2 + i_y^2} + i_y i_z \frac{i_y^2}{i_y^2 + i_z^2} + i_x i_y i_z \frac{i_y^3}{i_x^3 + i_y^3 + i_z^3}; \qquad (11)$$

$$i^{пр}_z = i_z + i_x i_z \frac{i_z^2}{i_x^2 + i_z^2} + i_y i_z \frac{i_z^2}{i_x^2 + i_z^2} + i_x i_y i_z \frac{i_z^3}{i_x^3 + i_y^3 + i_z^3}. \qquad (12)$$

Пример 6. Дано $I_w = I_x I_y I_z$, где темпы роста разнонаправлены: I_x = 1,2; I_y = 0,7; I_z = 1,5; I_w = 1,26. Темпы прироста и остаточный член соответственно равны: i_w = 0,26; i_x = 0,2; i_y = - 0,3; i_z = 0,5; $i_x i_y$ = - 0,06; $i_x i_z$ = + 0,1; $i_y i_z$ = - 0,15; $i_x i_y i_z$ = -0,03, то есть 0,26 = = 0,2 – 0,3 + 0,5 – 0,06 + 0,1 – 0,15 – 0,03. Подставив принятые значения темпов прироста в формулы (10) - (12), получим:

$i^{пр}_x$ = 0,2 – 0,0184615 + 0,0137931 – 0,002264 = = 0,193065;

$i^{пр}_y$ = - 0,3 – 0,041534 – 0,039706 + 0,00764 = = - 0,3736;

$i^{пр}_z$ = 0,5+ 0,086207 – 0,110294 – 0,035378 = = 0,440535;

i_w = 0,193068 – 0,3736 + 0,440535 = 0,26.

По аналогии с определением алгоритма для трехфакторной функции находим *алгоритм* для четырехфакторной функции: $\boldsymbol{Ал_4 = i_x i_y i_z i_v/(i^4_x + i^4_y + i^4_z + i^4_v)}$, который выступает вослед предшествующему $\boldsymbol{Ал_3}$ при сохранении однопорядковости.

Однопорядковость достигается в результате учета соответствующих начальных значений компонентов (*то есть за счет содержательной стороны явления*), дополняющих и конкретно определяющих соответствующие слагаемые приведенных значений факторов, что обеспечивает сравнение и сопоставление анализируемых величин. Например, для трехфакторной функции приведенные значения фактора $i^{пр}_x$, с учетом начальных значений компонентов, имеют вид:

$$i^{пр}_x = I_{y0} I_{z0}\, i_x + I_{z0} i_x^2 \frac{i_x i_y}{i_x^2 + i_y^2} + I_{y0} i_x^2 \frac{i_x i_z}{i_x^2 + i_z^2} + i_x^3 \frac{i_x i_y i_z}{i_x^3 + i_y^3 + i_z^3}.$$

Здесь каждая доля остаточного члена состоит из однородных и однопорядковых частей, что делает их сравнимыми и сопоставимыми. Это придает методу *универсальный* характер, а учет коэффициента перед *алгоритмом* в показательной степени, соответствующий количеству сомножителей, позволяет назвать предложенное решение *степенным методом*.

Способность степенного метода раскладывать остаточный член не только для двух- или трехфакторной функции, но и для многомерных - подтверждает универсальный характер предложенного метода. Решение сведено к последовательному приведению *n*-мерной функции к двухчленному уравнению. Переход от *n*-мерной функции к *n* +1-мерной функции основан на использовании предшествующего алгоритма, учитывающего происшедшее изменение. Достоинство этого метода состоит в том, что он позволяет получить однозначное решение по разложению полного прироста между факторами. Двухфакторная функция остается основной или начальной для последующих функций. Любое произведение из *n* сомножителей раскладывается на *n* однородных слагаемых единственным способом.

Из рассмотренных выше примеров видно, что предложенный метод позволяет разложить дополнительный прирост по факторам полностью без какого-либо остатка и предпочтения с наперед заданной степенью точности. Выражения (7), (8), (10), (11), (12) удовлетворяют требованиям математической логики вне зависимости от абсолютных значений величин, входящих в формулы (1) или (2), а также их одно- или разнонаправленности[6].

Для иллюстрации жизнеспособности формул (7) и (8) воспользуемся примером из книги Г.В. Ковалевс-

[6] Предложенная методика может быть применена, например, при разделе спорной площади или объема, то есть она может быть востребована для решения различных практических задач, например для раздела акватории Каспийского моря.

кого «Индексный метод в экономике»[7] (обозначения автора примера).

Пример 7. Число рабочих (T) в базовом периоде составляло 1200 человек, а выработка (V) на одного работника - 50 тонн угля. В последующем число работников сократилось до 1000 человек, а выработка составила 40 тонн. Дополнительный прирост (неразложимый остаток) находится из выражения: $(T_1 - T_0)\times(V_1 - V_0) = (-200)\times(-10) = 2000$ тонн. На основе полученного результата автор констатирует: «Однако еще нигде и никому не удавалось добывать уголь таким "оригинальным" способом». (Речь идет о положительном знаке прироста.) В действительности все правильно. Положительное значение остаточного члена $[(-\Delta t)\times(-\Delta v)]$ - «не искусственно сконструированная величина», как полагает автор примера, а выражает мгновенный переход T_1 к своему базовому (исходному) значению T_0, а величины V_1 к V_0. В этом случае оставшаяся площадь остаточного члена (относительно всего положительного тела - общего объема произведенной продукции) представляет положительную величину. Фактически никакого умножения отрицательных чисел нет, а остается просто положительная величина ($\Delta t\times\Delta v$) после изъятия из общей площади отрицательных факторов-площадей ($-\Delta tV_0$) и ($-\Delta vT_0$). В данном случае положительное значение остаточного члена имеет четкую графическую интерпретацию, что следует из зеркального отражения фигуры, представленной на вышеприведенном рисунке.

Рассмотренные примеры (№ 1-7) свидетельствует о том, что роль каждого фактора точно определена, поэтому нет оснований для отдания предпочтения одному из них. Это подтверждается простым примером. Предположим, что качественный фактор увеличился на 1%, а количественный - на 99%. Спрашивается, на каком основании весь дополнительный прирост (остаточный член) должен быть отнесен к качественному фактору? Другой случай: оба фактора равноценны, как поступать в таком случае?

Пример 8 из журнала «Экономика и математические методы», предложенный С.С. Липовецким в таблицах 1-3[8]. Исходные данные за начальный и конечный периоды даны автором в таблице (обозначения автора примера). Получены значения, показывающие удельный вес первого предприятия в размере 43% и второго предприятия в размере 57% в общей величине произведенной продукции. Эти данные полностью согласуются с положительными абсолютными значениями численности и выработки как первого, так и второго предприятий, то есть каждое из них вносит соответствующий положительный вклад в общее увеличение продукции.

Таблица

Исходные данные за начальный и конечный периоды

Предприятия	Продукция, штук		Численность, человек		Выработка, шт/чел.	
i	Q_{0i}	Q_{1i}	q_{0i}	q_{1i}	p_{0i}	p_{1i}
1-е предприятие	15000	20000	200	250	75,0	80,0
2-е предприятие	30000	40000	300	350	100,0	114,29
Итого	45000	60000	500	600	90,0	100,0

В темпах прироста получаем следующие соотношения для каждого предприятия и их совместного влияния (i_{Q3}):

$$i_{Q_1} = i_{q1} + i_{p1} + i_{q1}i_{p1} = 0,25 + 0,0667 + 0,0166 = 0,3333;$$

$$i_{Q_2} = i_{q2} + i_{p2} + i_{q2}i_{p2} = 0,1667 + 0,1429 + 0,0237 = 0,3333;$$

$$i_{Q_3} = i_{q3} + i_{p3} + i_{q3}i_{p3} = 0,2 + 0,1111 + 0,0222 = 0,3333.$$

Приведенные значения факторов, рассчитанные по формулам (6) и (7), равны:

$$i_{Q_1}^{пр} = i_{q1}^{пр} + i_{p1}^{пр} = 0,2655 + 0,0678 = 0,3333;$$

$$i_{Q_2}^{пр} = i_{q2}^{пр} + i_{p2}^{пр} = 0,1804 + 0,1529 = 0,3333;$$

$$i_{Q_3}^{пр} = i_{q3}^{пр} + i_{p3}^{пр} = 0,21698 + 0,11635 = 0,3333.$$

Из данных соотношений находим удельное влияние (d) каждого фактора на итоговый показатель:

$$d_{q_1} = (0,21698 - 0,1804) : (0,2655 - 0,1804) = 0,43,$$ или 43%;

$$d_{p_1} = (0,1529 - 0,11635) : (0,1529 - 0,0678) = 0,43,$$ или 43%;

[7] Ковалевский Г.В. Индексный метод в экономике. М.: Финансы и статистика, 1989. С. 110-111.

[8] См.: Липовецкий С.С. К дальнейшему развитию индексного метода // Экономика и математические методы. 1989. Т. 25. № 1. С. 153-154.

d_{q_2} = (0,2655 – 0,21698) : (0,2655 – 0,1804) = 0,57, или 57%;

d_{p_2} = (0,11635 – 0,0678) : (0,1529 – 0,0678) = 0,57, или 57%.

По мнению автора примера, они «показывают содержательно верные результаты: -0,49 = -1,59 + 1,1, то есть за счет перераспределения численности вклад первого предприятия в изменение средней выработки отрицателен, второго - положителен». В целом, как следует из представленного автором расчета, увеличение численности на обоих предприятиях уменьшает общий результат на 49%.

Подобные расчеты с компонентами и факторами говорят о том, что сами по себе вычислительные операции не отражают реального положения дел. Такой случай как раз и имеет место в рассматриваемой работе. В ней пытаются доказать, что при долях объема продукции, равных 0,333 - у первого и 0,667 - у второго предприятия, относительно всей произведенной продукции, соотношение составит не 1 : 2, как это следует из данных задачи (20000 : 40000), а 0,45 к 9,55, то есть 1 : 20?! Математический аппарат в этом случае стал орудием по искажению реального экономического явления, поскольку он был оторван от анализируемой модели. Полученные в процессе логарифмирования компонентов и факторов значения, несмотря на возможно формально правильные с математической точки зрения вычисления, не имеют практически ничего общего с реально происходящим процессом, а поэтому и не могут быть приняты.

Причина несостоятельности предлагаемых в литературе методов и способов разделения остаточного члена на основе использования индексов обусловлена тем, что большинство из них основано не на разделении величины самого остаточного члена, а на математических операциях с темпами роста и темпами прироста. Здесь уместно вспомнить общее правило, согласно которому успех в решении проблемы предполагает соответствующую постановку задачи, построение экономико-математической модели, анализ ее проведения с интерпретацией результатов[9].

Рассмотренные примеры убеждают нас в том, что предложенный алгоритм справедлив и может быть использован на практике, даже если представленное обоснование выглядит недостаточно строгим и полным. Степенной метод ценен сам по себе.

Для оценки влияния примененных ресурсов на результирующий показатель - это может быть различный итоговый показатель: валовой продукт (ВП), готовый конечный продукт (ГКП) или ВВП, воспользуемся хорошо известными качественными показателями: производительностью труда и фондоотдачей, которые характеризуют эффективность использования рабочей силы (РС) и основных фондов (ОФ). Рабочая сила и основные фонды представляют количественные показатели. Сравнение суммарного влияния, с одной стороны, количественных показателей, а с другой - качественных показателей на прирост итогового показателя, позволит оценить их роль в воспроизводственном процессе. С этой целью воспользуемся формулой (2) и представим ее в виде равенства: $I_{вп} = I_{рс} \times I_{пт} = I_{оф} \times I_{фо}$, которое в темпах прироста примет вид: $1 + i_{вп} = (1 + i_{рс}) \times (1 + i_{пт}) = (1 + i_{фо}) \times (1 + i_{оф})$. После упрощения получаем два равенства: $i_{вп} = i_{рс} + i_{пт} + i_{рс}\, i_{пт}$ (13); $i_{вп} = i_{оф} + i_{фо} + i_{оф}\, i_{фо}$ (14). Просуммировав выражения (13) и (14), получим новую зависимость: $2i_{вп} = i_{рс} + i_{пт} + i_{рс}\, i_{пт} + i_{оф} + i_{фо} + i_{оф}\, i_{фо}$ (15). В ряде случаев значениями остаточных членов ($i_{рс}\, i_{пт}$) и ($i_{оф}\, i_{фо}$) можно пренебречь, как на порядок меньших самих темпов прироста. Тогда равенство (15) примет вид: $2i_{вп} \cong i_{рс} + i_{пт} + i_{оф} + i_{фо}$ (16), который вполне пригоден для приближенной оценки влияния количественных и качественных показателей на итоговый показатель. На основе зависимости (16) может быть определено как раздельное, так и совокупное влияние того или иного фактора. Например, объединив, с одной стороны, количественные факторы (РС и ОФ), а с другой - качественные показатели (ПТ и ФО), можно определить их долю в воспроизводственном процессе: $d_{кол1} \cong (i_{рс} + i_{оф}) / 2i_{вп}$ (17) $d_{кач1} \cong (i_{пт} + i_{фо}) / 2i_{вп}$ (18), где $d_{кол1}$ и $d_{кач1}$ - соответственно удельный вес количественных и качественных факторов в приросте итогового показателя в первом приближении.

Формулы (17) и (18) могут быть заменены более точными зависимостями $d_{кол2} \cong (I_{рс} \times I_{оф} - 1) / 2i_{вп}$ (19); $d_{кач2} \cong (I_{пт} \times I_{фо} - 1) / 2i_{вп}$ (20). Их уточнение основано на допущении о примерном равенстве пар сомножителей с учетом знака: $i_{рс}\, i_{пт} \cong i_{рс}\, i_{оф} \cong i_{оф}\, i_{фо} \cong i_{фо}\, i_{пт}$. Но безупречно точное математическое выражение будет получено в случае использования *Алгоритма* - степенного метода по разложению остаточного члена между факторами, его вызвавшими. Необходимость точного разложения обусловлена тем, что анализ может охватывать длительный период, и в этом случае ошибка из-за недоучета долей остаточного члена способна существенно повлиять на результат всего исследования.

Представим разложение остаточного члена, где удельный вес каждого из приведенных факторов оп-

[9] См.: Клейнер Г.Б., Пионтковский Д.И. О детерминированном анализе систем показателей // Экономика и математические методы. 1998. Т. 34. № 2.

ределяется из формул: $i^{пр}_{рс} = i_{рс} + i_{пт}\, i_{рс}\, i^2_{рс} / (i^2_{рс} + i^2_{пт})$ (21); $i^{пр}_{оф} = i_{оф} + i_{оф}\, i_{фо}\, i^2_{оф} / (i^2_{оф} + i^2_{фо})$ (22); $i^{пр}_{фо} = i_{фо} + i_{оф}\, i_{фо}\, i^2_{фо} / (i^2_{оф} + i^2_{фо})$ (23); $i^{пр}_{пт} = i_{пт} + i_{пт}\, i_{рс}\, i^2_{пт} / (-i^2_{рс} + i^2_{пт})$ (24) (приведенные значения в том смысле, что они учитывают влияние факторов с учетом доли остаточного члена). Предложенный способ разложения остаточного члена позволяет на основе строго обоснованных действий точно вычислить долю влияния количественного ($d_{кол}$) и качественного ($d_{кач}$) факторов на прирост результирующего показателя: $d_{кол} = (i^{пр}_{рс} + i^{пр}_{оф}) / 2i_{вп}$ (25); $d_{кач} = (i^{пр}_{пт} + i^{пр}_{фо}) / 2i_{вп}$ (26).

Используя выражения (25) и (26) в их развернутом виде, то есть с учетом зависимостей (21 - 24), можно с заданной степенью точности определить влияние количественных и качественных показателей на прирост итогового показателя на уровне народного хозяйства, отдельных отраслей, групп оборудования и предприятий. В качестве обобщающего показателя влияния ресурсов выступает зависимость (25), а их эффективности - зависимость (26); по их значениям можно с большой долей точности судить о доле количественного и качественного влияния на прирост итогового показателя[10].

На основе степенного метода по разложению дополнительного приращения можно сделать вывод: *алгоритм* позволил получить общее выражение итогового приращения (Δz или i_z) в виде двучленной (а при необходимости и n-членной) формулы. Он не зависит от абсолютных значений величин, представляющих остаточный член, а также от их одно- или разнонаправленности. Предложенный метод сам по себе имеет познавательную ценность; вполне возможно, что он окажется востребованным не только для экономико-статистических расчетов оценки экономического роста (что, безусловно, важно), но и в иных областях и сферах научно-практической деятельности.

Выводы.

1. Степенной метод открывает более широкие возможности научного анализа самых различных явлений.
2. Работоспособность и достоверность предложенного метода апробирована на целом ряде различных примеров.
3. Представленный алгебраический способ позволяет разложить любое произведение n-мерной функции на то же число слагаемых обоснованным методом.
4. Ценность степенного метода - простота, ясность и легкость применения формулы - представляет его несомненное достоинство, что можно считать основным критерием достоверности.
5. Способ нахождения частей остаточного члена на основе степенного метода складывается из хорошо известных положений и правил элементарной математики.
6. Степенной метод позволяет *однозначно* получить решение по разложению остаточного члена.
7. Только практика в конечном итоге определит пригодность и необходимость применения алгоритма.
8. Идея степенного метода состоит в переходе от a к a^2 и от b к b^2 как членов одного семейства.
9. Из зависимости (2) выделен остаточный член ($i_x i_y$) в качестве самостоятельной конкретной величины. В этом случае с ним можно провести анализ с помощью обычных математических действий для получения однородных частей с последующим уточнением окончательного результата.
10. Каждая возникающая в науке новая отрасль влечет за собой появление дифференциальных уравнений нового типа, которые для своего решения потребуют создания новой ветви математики. Отбрасывание же остаточного члена ведет к упрощению задачи, что способно исказить ее смысл.
11. Возможность разложения произведения (остаточного члена) на однородные слагаемые далеко выходит за рамки индексного метода и связано с алгебраизаций дифференциального исчисления. Речь идет о точно-однозначном определении производной функции двух или нескольких переменных без остатка и без привлечения предельных переходов и использования метода последовательных приближений.
12. Соблюдение критерия, на основе выполнения необходимого и достаточного условия отвечающего современным требованиям строгости и точности, дает право на использование алгоритма, который позволяет алгебраическим путем получить корни дифференциального уравнения точно и без конструирования дополнительных условий.
13. Геометрическое истолкование остаточного члена (см. рисунок - площадь произведения ab) дает возможность логически и наглядно обосновать получение положительного результата при умножении двух отрицательных чисел.

[10] Влияние качественных и количественных факторов на прирост валовой продукции промышленности СССР за 1961-1985 гг. составило соответственно около 20 и 80%. См.: Орлов А.В. Оценка эффекта от примененных ресурсов // Вестник статистики. 1989. № 12. С. 54. В период с 2005 по 2008 г. эти соотношения в промышленности РФ составили около 75 и 25% соответственно. (См.: Российский статистический ежегодник, 2009. С. 138-139, 308-309, 326.)